



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

01F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۱۸

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
نیما نیکنام	میلاد حسینی نامی
	ارسلان حسنوند
	سید جواد نظری

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- عرض از مبدأ خط گذرنده از محل برخورد خط $2y + 3x = 5$ با نیم‌ساز ربع اول و عمود بر خط $2y + x = 4$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا محل برخورد $2y + 3x = 5$ و $y = x$ را با حل دستگاه زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = x \\ 2y + 3x = 5 \Rightarrow 2x + 3x = 5 \Rightarrow x = 1, y = 1 \end{cases}$$

از طرفی با توجه به شرط عمود بودن، باید شیب خط مورد نظر معکوس و قرینه شیب خط $2y + x = 4$ (یعنی $-\frac{1}{2}$) باشد، پس شیب خط مورد نظر ۲ است.

برای به دست آوردن شیب خط، y را در یک طرف معادله خط تنها کنید و ضریب x در طرف دیگر شیب خط است، یعنی:

$$2y + x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

شیب خط

حال، کافی است که شیب خط (یعنی عدد ۲) و مختصات نقطه $(1, 1)$ را در معادله کلی خط (یعنی: $y - y_1 = m(x - x_1)$) قرار دهیم:

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

(دقت کنید اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ باشد، h عرض از مبدأ است).

بنابراین، عرض از مبدأ خط مورد نظر، -۱ است.

سؤال مورد نظر را می‌توانستیم به این صورت مطرح کنیم:

اگر $2y + 3x = 5$ و $y = x$ و $2y + x = 4$ به ترتیب معادلات سه ضلع AB و AC و BC از مثلث ABC باشند، عرض از مبدأ ارتفاع AH کدام است؟

۲- چه تعداد از قضایای زیر را می‌توان به صورت قضیه دو شرطی در نظر گرفت؟

(الف) در هر لوزی، قطرهای بر هم عمودند.

(ب) در هر مستطیل، قطرهای با هم برابرند.

(پ) در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داریم.

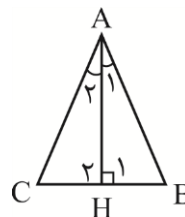
(ت) در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌ساز زاویه رأس ارتفاع هم است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

تنها مورد "ت" را می‌توان به صورت دو شرطی در نظر گرفت، یعنی اگر در یک مثلث یک نیم‌ساز، ارتفاع هم باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

اثبات آن هم به این صورت است:



$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{چون } AH \text{ نیم‌ساز است:} \\ AH = AH & \text{مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ & \text{چون } AH \text{ ارتفاع است:} \end{cases}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پس دو مثلث ABH و AHC در حالت دو زاویه و ضلع بین (ض.ز) همنهشت هستند، پس اجزای متناظر آنها هم برابرند از جمله $AC = AB$

و در موارد دیگر، مثال نقض ارائه می‌دهیم.

الف) در چهار ضلعی روبه‌رو که شبیه بادبادک است قطرهای بر هم عمودند حتی یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است، ولی چهار ضلعی لوزی نیست.



ب) در دوزنقه متساوی الساقین قطرهای برابرند، ولی چهارضلعی مستطیل نیست.

این شکل مثال نقض برای عکس قضیه (پ) هم هست، زیرا دو ضلع برابر و دو ضلع موازی دارد و متوازی‌الاضلاع نیست. مورد (الف) برای دو شرطی بودن باید به این صورت باشد:

در هر لوزی قطرهای عمودمنصف یکدیگرند. تا بتوان قضیه دو شرطی را به صورت زیر بیان کرد.

هر چهارضلعی لوزی است، اگر و تنها اگر دو قطر آن عمودمنصف یکدیگر باشند و برای مورد (ب) قضیه دو شرطی به صورت: هر چهار ضلعی مستطیل است، اگر و تنها اگر قطرهای برابر داشته باشد و قطرهايش منصف یکدیگر باشند.

یا هر چهار ضلعی مستطیل است، اگر و تنها اگر قطرهای برابر داشته باشد و اضلاع آن دو به دو موازی باشند. و در مورد (پ) به این صورت:

هر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر اضلاع آن دو به دو موازی باشند.

یا هر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر اضلاع روبه‌روی آن مساوی باشند.

در ضمن هر لوزی، متوازی‌الاضلاع است، ولی عکس آن درست نیست.

همین طور هر مستطیل، متوازی‌الاضلاع هست، ولی عکس آن درست نیست.

و هر مربع هم لوزی است و هم مستطیل ولی عکس آن درست نیست (یعنی هر لوزی مربع نیست و هر مستطیل مربع نیست)

۳- نقطه $A(2, 1)$ ، قرینه نقطه B نسبت به نقطه $M(-3, 2)$ است، مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟

۴) ۵-

۳) ۱

۲) ۱۱

۱) ۱۱-

پاسخ: گزینه ۴

دقت کنید M وسط پاره خط AB است و داریم:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M, \quad \frac{y_A + y_B}{2} = y_M$$

یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 + x_B}{2} = -3 &\Rightarrow x_B = -8 \\ \frac{1 + y_B}{2} = 2 &\Rightarrow y_B = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_B + y_B = -5$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۴- اگر خط $2x - 3y + 1 = 0$ یکی از نیم‌سازهای دو خط L_1, L_2 باشد و دایره‌ای به مرکز $(2, 0)$ بر دو خط L_1, L_2 مماس باشد، معادله نیم‌ساز دیگر L_1, L_2 کدام است؟

$2y + 3x = 4$ (۴)

$2x + 3y = 4$ (۳)

$2y + 3x = 6$ (۲)

$2x + 3y = 6$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اولاً توجه داشته باشید که نیم‌سازهای دو خط بر هم عمودند، پس شیب نیم‌ساز دیگر قرینه و معکوس شیب خط $2x - 3y + 1 = 0$ است، یعنی:

$$(2x - 3y + 1 = 0) \Rightarrow \text{شیب نیم‌ساز دیگر} = -\frac{3}{2}$$

ثانیاً با توجه به این که فاصله نقطه $(2, 0)$ از دو خط L_1, L_2 برابر است، پس نقطه $(2, 0)$ روی نیم‌ساز این دو خط قرار دارد، پس گزینه صحیح گزینه‌ای است که شیب آن $-\frac{3}{2}$ است و نقطه $(2, 0)$ در آن صدق می‌کند، یعنی گزینه ۲. (چون نقطه $(2, 0)$ روی معادله صورت سوال صدق نمی‌کند، پس روی نیم‌ساز دیگر صدق می‌کند) البته با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن با استفاده از معادله خط (یعنی $y - y_0 = m(x - x_0)$) می‌توانستیم معادله نیم‌ساز دیگر را خودمان به دست آوریم و از گزینه‌ها استفاده نکنیم، یعنی:

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y = -3x + 6 \Rightarrow 2y + 3x = 6$$

۵- تنها یک نقطه روی خط AB وجود دارد که از A به فاصله ۴ سانتی‌متر و از B به فاصله ۲ سانتی‌متر است، طول پاره خط AB برابر کدام است؟

2 یا 6 (۴)

فقط 3 (۳)

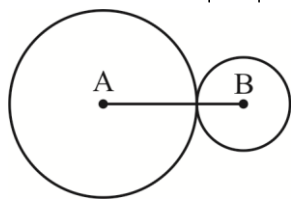
3 یا 1 (۲)

فقط 6 (۱)

پاسخ: گزینه ۴

یا نقطه مورد بحث بین A و B است که در این صورت $|AB| = 4 + 2 = 6$

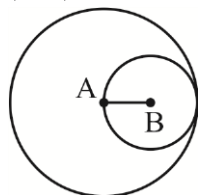
در این صورت دایره‌هایی به مراکز A و B و به شعاع‌های ۲ و ۴ بر هم مماس خارجند و $|AB| = R + R' = 4 + 2 = 6$



و یا نقطه مورد بحث روی امتداد AB است که در این صورت $|AB| = 4 - 2 = 2$

در این صورت دایره‌هایی به مراکز A و B و به شعاع‌های ۲ و ۴ بر هم مماس درون هستند.

$$|AB| = R - R' = 4 - 2 = 2$$



۶- سه نقطه $A(3, 1)$, $B(2, -2)$, $C(0, -1)$ رؤس مثلث ABC هستند. طول میانه AM کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{13}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مختصات وسط BC را به دست می آوریم:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$x_M = 1, y_M = -2 \Rightarrow M(1, -2)$$

سپس فاصله A تا M را به دست می آوریم:

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{13}$$

۷- اگر $A(-2, 3), B(2, 1), C(0, -1)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله میانه AM کدام است؟

$$x + y = 1 \quad (4)$$

$$x + y = -1 \quad (3)$$

$$x - y = 1 \quad (2)$$

$$x - y = -5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

اول مختصات وسط BC رو به دست می آوریم:

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+(-1)}{2} \right) = (1, 0)$$

حال، یا باید دنبال گزینه ای بگردیم که هم مختصات A توش صدق کنه هم مختصات M یا باید خودمون معادله خط AM رو بسازیم.

اول شیب AM:

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{0 - 3}{1 - (-2)} = -1$$

بعدشم جایگذاری یکی از دو نقطه A یا M و شیب در معادله کلی خط:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 0 = -1(x - 1)$$

خلاصه، معادله AM:

$$x + y = 1$$

۸- نقطه A روی محور x ها قرار دارد، کمترین مقدار مجموع فواصل A از دو نقطه $B(3, 0), C(k, 0)$ برابر ۵ است، مجموع

مقادیر ممکن برای k کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

اگر مختصات A، $(x, 0)$ باشد، مجموع فواصل A از B و C یعنی $|x-3| + |x-k|$ و کمترین مقدار آن برابر ۵ است، پس $k = -2$ و $k = 8$ و مجموع مقادیر k برابر ۶ می باشد.

دقت کنید زمانی مجموع فواصل یک نقطه روی محور X (یا Y) از دو نقطه دیگر روی همین محور کمترین است که نقطه مورد نظر بین دو نقطه باشد و این کمترین مقدار در واقع فاصله دو نقطه است.

یعنی یا به این صورت:



و یا به صورت:

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۹- اگر $A(2, -3)$ مختصات یکی از رئوس یک مربع باشد و خط $3x - 4y + 2 = 0$ معادله یکی از اضلاع مربع باشد، مساحت مربع کدام است؟

۴ (۴)

۲۵ (۳)

۹ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

کافیست فاصله A تا ضلع مربع را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آوریم تا طول ضلع مربع را داشته باشیم و در نهایت طول ضلع را به توان دو برسانیم تا برابر مساحت شود.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times (-3) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{مساحت مربع} = 4^2 = 16$$

۱۰- اگر $4y - 3x - 2 = 0$ و $mx + y + 2 = 0$ معادلات دو ضلع مقابل یک مربع باشند، طول قطر مربع کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که این دو خط موازی هستند و برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی کافیست فاصله یک نقطه از یکی از دو خط را تا خط دیگر به دست آوریم، البته با انتخاب نقطه‌ای به طول صفر که روی خط $mx + y + 2 = 0$ واقع باشد، دیگر نیازی به به دست آوردن m نداریم.

$$mx + y + 2 = 0 \xrightarrow{x=0} y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

حال، کافیست فاصله نقطه $(0, -2)$ را تا خط $4y - 3x - 2 = 0$ به دست بیاریم:

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|4 \times (-2) - 3 \times 0 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

بنابراین طول قطر مربع، رادیکال دو برابر ضلع آن، یعنی $2\sqrt{2}$ است.

۱۱- اگر $A(-2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(0, -2)$ سه رأس یک مثلث باشند، مساحت مثلث کدام است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

$7/5$ (۲)

$8/5$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

این راه خیلی کوتاهه ولی تو کتابتون نیست.

اول دو تا بردار دلخواه با رأس‌های مثلث می‌سازیم:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (5, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = (2, -3)$$

بعدش کافیه مؤلفه اول هر بردار رو در مؤلفه دوم بردار دیگه ضرب کنی و قدرمطلق تفاضل اونارو به دو تقسیم کنی حاصل برابر مساحت مثلث می‌شه، یعنی:

$$S = \frac{|(2 \times 1) - (-3 \times 5)|}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش دوم:

می‌تونیم معادله خط BC را به دست بیاریم، بعد فاصله A تا خط BC (طول ارتفاع AH) و طول ضلع BC رو از فرمول فاصله دو نقطه به دست بیاریم و در آخر مساحت رو از فرمول $S = \frac{1}{2} AH \times BC$ به دست بیاریم. ولی خیلی برای یک تست راه خوبی نیست. ولی برای مرور فرمول‌ها بد نیست.

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 2}{0 - 3} = \frac{4}{3}, C(0, -2)$$

و با جایگذاری مختصات C و شیب خط در معادله زیر داریم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 2 = \frac{4}{3}(x - 0)$$

$$\Rightarrow 4x - 3y - 6 = 0$$

معادله BC:

حال، از فرمول فاصله نقطه از خط فاصله نقطه A(-2, 1) رو از خط BC به دست می‌یاریم:

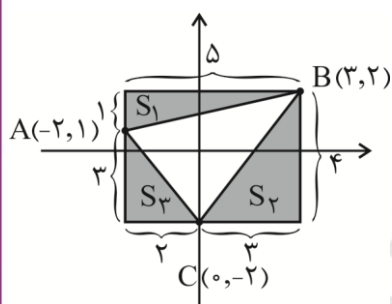
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow AH = \frac{|4 \times (-2) - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{17}{5}$$

همین‌طور طول BC را از فرمول فاصله دو نقطه به دست می‌یاریم:

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = 5$$

خلاصه:

$$S = \frac{1}{2} \times |AH| \times |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{17}{5} \times 5 = \frac{17}{2} = 8.5$$



روش سوم: از شکل استفاده کنیم و یک مستطیل و سه مثلث به شکل زیر در نظر بگیریم و مساحت سه تا مثلث رو از مساحت مستطیل کم کنیم تا مساحت مثلث ABC به دست بیاد:

$$S_{\text{مستطیل}} = 4 \times 5 = 20$$

$$S_1 = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5, S_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6, S_3 = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

$$S_{ABC} = 20 - (2.5 + 6 + 3) = 8.5$$

۱۲- به ازای چند مقدار m، دو خط $mx + 2y = 1$ و $2x + (3m + 1)y = 2m$ دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند؟

(۴) یک مقدار

(۳) ۲ مقدار

(۲) هیچ مقدار

(۱) هر مقدار m

پاسخ: گزینه ۴

باید دو خط موازی هم باشند و شرط موازی بودن دو خط به معادلات $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ این است که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشند.

(اگر دو خط به صورت $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ باشند، شرط موازی بودن این است که: $m = m'$ باشد و $h \neq h'$ باشد). یعنی شیب‌ها برابر باشند و عرض از مبدأها متفاوت؛ دقت کنید اگر عرض از مبدأها هم یکی باشند، دو خط منطبق می‌باشند.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



خلاصه:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{3m+1} \neq \frac{1}{2m}$$

$$3m^2 + m = 4 \Rightarrow 3m^2 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1, -\frac{4}{3}$$

که تنها به ازای $m = -\frac{4}{3}$ دو خط موازی می باشند.

به ازای $m = 1$ نامساوی آخر برقرار نیست و داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۳- دو خط L_1, L_2 به معادلات $4x - 3y + 3 = 0$ و $ax + by + c = 0$ موازی اند و فاصله عرض از مبدأهای آنها ۲ واحد است، فاصله دو خط کدام است؟

۲ (۴)

۰/۸ (۳)

۱/۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

عرض از مبدأ خط L_1 برابر یک است، زیرا:

$$(4x - 3y + 3 = 0 \xrightarrow{x=0} -3y = -3 \Rightarrow y = 1)$$

پس عرض از مبدأ خط L_2 یا ۳ است یا -۱ یعنی نقطه $(0, 3)$ یا $(0, -1)$ روی آن قرار دارد، حال، کفایت فاصله یکی از این نقاط را تا خط L_1 به دست آوریم مثلاً $(0, 3)$:

$$\frac{|4 \times 0 - 3 \times 3 + 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{6}{5} = 1/2$$

دقت کنید اگر فاصله $(0, -1)$ را هم به دست می آوردیم جواب همین بود:

$$\frac{|4 \times 0 - 3(-1) + 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{6}{5} = 1/2$$

۱۴- نقطه A روی محور y ها طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(4, 4)$ و $C(2, 0)$ مینیمم است، عرض نقطه A کدام است؟

۱ (۴)

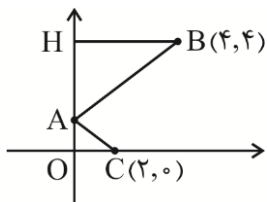
$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول: در این صورت باید دو مثلث AHB و ACO متشابه باشند.



حال برای یافتن عرض A دو روش داریم:

(۱) از تالس استفاده کنیم یعنی:

$$\frac{AO}{AH} = \frac{CO}{HB}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$\frac{y}{4-y} = \frac{2}{4} \Rightarrow 4y = 8 - 2y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

۲) این که قرینه C را نسبت به محور y ها به دست آوریم، یعنی $C'(-2, 0)$ و نقطه برخورد خط BC' را با محور y ها بیابیم.

$$m_{BC'} = \frac{4-0}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$$

$$y-0 = \frac{2}{3}(x+2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{3}$$

روش دوم: فاصله A تا دو نقطه را به دست آوریم و به عنوان یک تابع از عرض A در نظر بگیریم، سپس عرضی که به ازای آن تابع مینیمم می شود را بیابیم یعنی:

$$AC = \sqrt{4+y^2}, \quad AB = \sqrt{16+(4-y)^2}$$

$$d(y) = AB + AC = \sqrt{4+y^2} + \sqrt{16+(4-y)^2}$$

که واضح است این روش طولانی بوده و حل معادله $d'(y) = 0$ کار ساده ای نیست.

۱۵- خطوط $3x+4y+10=0$ و $ax+by=0$ دو ضلع مجاور یک مستطیل هستند و نقطه $(-1, 2)$ یک رأس مستطیل، مساحت مستطیل کدام است؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اولاً دو ضلع مجاور مستطیل بر هم عمودند، پس شیب خط $ax+by=0$ برابر $(-\frac{a}{b})$ معکوس و قرینه شیب خط $3x+4y-10=0$ برابر

$$(-\frac{3}{4}) \text{ است. یعنی: } -\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

پس معادله آن به صورت $y = \frac{4}{3}x$ یا $3y-4x=0$ است. حال، کافیت فاصله $(-1, 2)$ را از دو ضلع به دست بیاریم:

$$\frac{|3 \times 2 - 4(-1)|}{\sqrt{9+16}} = 2, \quad \frac{|3(-1) + 4(2) + 10|}{\sqrt{9+16}} = 3$$

یعنی اندازه دو ضلع برابر ۳ و ۲ واحد است، پس مساحت مستطیل برابر ۶ می باشد.

۱۶- اگر $A(2, 3)$ یک رأس لوزی و خط به معادله $y+x=1$ قطر BC باشد، مختصات رأس مقابل A کدام است؟

(۰, ۱) (۴)

(۳, -۲) (-۳)

(۲, -۱) (-۲)

(۱, -۲) (-۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

توجه کنید در لوزی، قطر ها عمود منصف یکدیگرند، پس اگر مختصات رأس مقابل A، $D(x, y)$ باشد، اولاً باید وسط AD روی قطر BC باشد، ثانیاً BC عمود بر AD می باشد. بنابراین:

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2} \right) \in BC$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پس:

$$\frac{y. + 3}{2} + \frac{x. + 2}{2} = 1 \Rightarrow y. + 3 + x. + 2 = 2 \Rightarrow$$

$$y. + x. = -3$$

از طرفی شیب AD برابر:

$$m_{AD} = \frac{y. - 3}{x. - 2}$$

و چون $AD \perp BC$ پس:

$$\frac{y. - 3}{x. - 2} \times (-1) = -1$$

(شرط عمود بودن دو خط با شیب‌های m و m' این است که $mm' = -1$)

$$y. - 3 = x. - 2 \Rightarrow y. - x. = 1$$

و از حل دستگاه زیر $(x., y.)$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} y. + x. = -3 \\ y. - x. = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y. = -2 \Rightarrow y. = -1$$

$$y. + x. = -3 \xrightarrow{y. = -1} -1 + x. = -3 \Rightarrow x. = -2$$

روش دوم:

می‌توانیم دو شرط فوق را در مورد گزینه‌ها بررسی کنیم، یعنی اولاً ببینیم شیب خطی که A با کدام گزینه می‌سازد برابر یک است و ثانیاً ببینیم، وسط A با کدام گزینه روی $y + x = 1$ است.

۱۷- مرکز دایره‌ای که سه ضلع یک مثلث بر آن مماس هستند کدام است؟

(۱) محل برخورد عمودمنصف‌ها

(۲) محل برخورد نیم‌ساز یک رأس با عمودمنصف ضلع مقابل آن

(۳) محل برخورد دو نیم‌ساز

پاسخ: گزینه ۳

اولاً، توجه کنید که نیم‌سازها هم‌مس‌اند، یعنی هر سه نیم‌ساز از یک نقطه می‌گذرند. ثانیاً، با توجه به ویژگی نیم‌ساز، این نقطه از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، پس اگر این نقطه را O بنامیم و به شعاع OH (فاصله O تا یکی از اضلاع) دایره‌ای رسم کنیم، اضلاع مثلث بر این دایره مماس می‌باشند.

نکته: محل برخورد عمودمنصف‌ها مرکز دایره‌ای است که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، چون طبق خاصیت عمودمنصف اگر محل برخورد عمودمنصف‌ها را G بنامیم فاصله G تا سه رأس مثلث برابر است و G مرکز دایره محیطی مثلث است.

۱۸- معادله خطی که در نقطه $(3, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ مماس است کدام است؟

$$3y + x - 15 = 0 \quad (۴)$$

$$y + 3x - 7 = 0 \quad (۳)$$

$$y + 3x - 13 = 0 \quad (۲)$$

$$3y + x - 9 = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با توجه به این که در نقطه تماس خط مماس، بر شعاع عمود است، باید شیب شعاع یعنی خطی که دو نقطه $(2, 1)$ و $(3, 4)$ را به هم وصل می‌کند، بیابیم و آن را معکوس و قرینه کنیم تا شیب خط مماس را داشته باشیم، سپس با توجه به این که $(3, 4)$ روی خط مماس است، معادله خط را بنویسیم.

$$m = \frac{4-1}{3-2} = 3 \Rightarrow m' = -\frac{1}{3}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y + x - 15 = 0 \text{ معادله مماس}$$



۱۹- اگر نقاط $A(1, 5)$ و $B(-1, 1)$ روی محیط دایره C باشند و خط $y = x + 3$ یکی از قطرهای دایره باشد، مجموع طول و عرض مرکز دایره برابر کدام است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

فاصله مرکز دایره تا دو نقطه روی محیط دایره برابر شعاع دایره است، پس مرکز روی عمودمنصف AB است، بنابراین کافیست مختصات محل برخورد قطر $(y = x + 3)$ و عمودمنصف AB را به دست آوریم.

$$m_{AB} = \frac{5-1}{1-(-1)} = 2 \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = -\frac{1}{2}$$

$(0, 3) =$ میانگین مختصات‌های A و B = مختصات M وسط AB

معادله عمودمنصف AB :

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 2y + x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2x + 6) + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3$$

نقطه برخورد دو خط:

$$x + y = 0 + 3 = 3$$

۲۰- معادله یکی از نیم‌سازهای دو خط $4x + 3y = 3$ و $3x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

$$x - y - 4 = 0 \quad (۴)$$

$$x + y - 2 = 0 \quad (۳)$$

$$7x + 7y - 4 = 0 \quad (۲)$$

$$7x - 7y - 2 = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

فاصله هر نقطه روی نیم‌ساز تا دو ضلع زاویه برابر است، بنابراین اگر (x, y) یک نقطه روی نیم‌ساز این دو خط باشد، فاصله آن تا دو خط را برابر قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\frac{|4x + 3y - 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3x + 4y + 1|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow$$

$$|4x + 3y - 3| = |3x + 4y + 1| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 3 = 3x + 4y + 1 \Rightarrow x - y - 4 = 0 \\ 4x + 3y - 3 = -3x - 4y - 1 \Rightarrow 7x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$4x + 3y - 3 = -3x - 4y - 1 \Rightarrow 7x + 7y - 2 = 0$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: برای به دست آوردن معادلات نیم‌سازهای دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ اگر $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ باشد، تنها کافیست، معادلات دو خط را یک بار با هم جمع کنید و یک بار از هم کم کنید، یعنی:

$$(a+a')x+(b+b')y+c+c'=0$$

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

در ضمن توجه داشته باشید، دو نیم‌ساز بر هم عمودند. (حاصل ضرب شیب آنها برابر منفی یک است)

۲۱- در مثلث زیر نقاط P, N, M وسط اضلاع هستند، اگر زاویه B برابر 70° و زاویه C برابر 60° باشد، اندازه زاویه $\hat{P}NM$

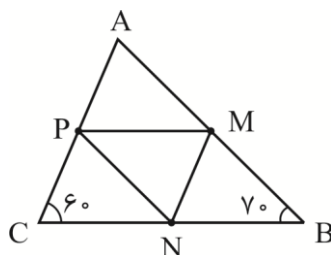
برابر کدام است؟

۶۰ (۱)

۵۰ (۲)

۷۰ (۳)

۴۰ (۴)

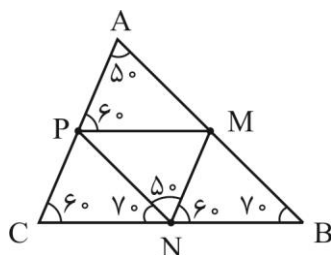


پاسخ: گزینه ۲

با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب:

$$\hat{CNP} = \hat{B} = 70^\circ$$

$$\hat{MNB} = \hat{C} = 60^\circ$$



بنابراین زاویه $\hat{P}NM$ برابر $180 - 70 - 60 = 50$ می‌باشد.

توجه کنید $\hat{A} = 50^\circ$ و دو مثلث ABC و MNP متشابه هستند و نسبت اضلاع آنها $\frac{1}{2}$ است.

۲۲- اگر $\frac{c+1}{d+2} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد حاصل $\frac{3a+2d}{2b+c+3d}$ برابر کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می‌تونی به جای این که از روابط معمولی استفاده کنی، فرض کنی $(a=2)$ و $(b=3)$ و $(c+1=2 \Rightarrow c=1)$ و $(d+2=2 \Rightarrow d=0)$ و با جایگذاری حاصل کسر رو به دست بیاری.

$$\frac{3a+2d}{2b+c+3d} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 0}{2 \times 3 + 1 + 3 \times 0} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اینارو هم بلد باشی بد نیست:

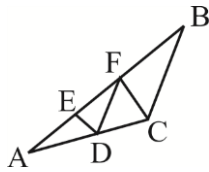
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{x}{x \pm y}, \frac{a \pm b}{b} = \frac{x \pm y}{y}, \frac{ka}{b} = \frac{kx}{y}$$

البته اگر می‌خواستیم از این روابط استفاده کنیم یکم حل‌مون طولانی می‌شد.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۳- در مثلث زیر ED موازی FC و FD موازی BC است. اگر EF=۲ و AE=۴ باشد اندازه AB برابر کدام است؟



۹ (۲)

۸ (۱)

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

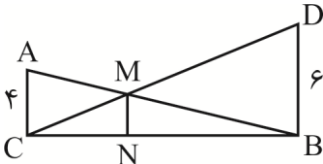
پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} ED \parallel FC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AC} \\ FD \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AF^2 = AE \times AB$$

از طرفی:

$$AF = AE + EF = 4 + 2 = 6 \Rightarrow 36 = 4 \times AB \Rightarrow AB = 9$$

۲۴- در شکل زیر، AC و DB و MN موازی اند، کدام است؟



$\frac{12}{5}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

$\frac{13}{5}$ (۴)

$\frac{5}{13}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به قضیه تالس در دو مثلث ABC و DBC داریم:

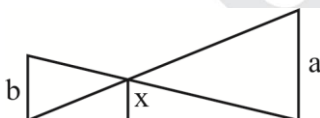
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{4} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{4-MN} = \frac{BN}{BC-BN} = \frac{BN}{CN} \\ \text{II} \quad \frac{MN}{DB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{6} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{6-MN} = \frac{CN}{BC-CN} = \frac{CN}{BN} \end{array}$$

با مقایسه رابطه I و II می توان نتیجه گرفت:

$$\left(\frac{a}{a \pm b} = \frac{x}{x \pm y} \text{ نکته:} \right) \frac{MN}{4-MN} = \frac{6-MN}{MN} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{MN}{4-MN+MN} = \frac{6-MN}{MN+6-MN} \Rightarrow \frac{MN}{4} = \frac{6-MN}{6}$$

$$6MN = 24 - 4MN \Rightarrow 10MN = 24 \Rightarrow MN = 2.4$$

نکته:



$$x = \frac{ab}{a+b} \text{ در شکل روبه‌رو:}$$

۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) و AH ارتفاع وارد بر وتر، اگر AC=۵ و CH=۲، اندازه AB چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)

۲/۵ (۲)

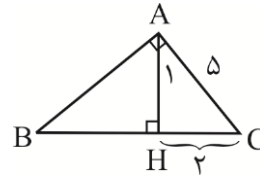
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش اول: به کمک قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول AH را به دست آوریم، سپس با توجه به تشابه $\triangle ABC$ و $\triangle AHC$ طول AB را به دست آوریم:



$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{21}}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{21}}{2}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hat{H}=\hat{A} & \hat{C}=\hat{C} & \hat{A}_1=\hat{B} \end{matrix}$

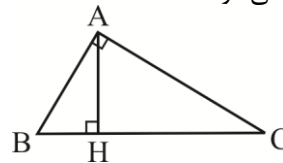
روش دوم:

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 25 = 2 \times BC \Rightarrow BC = \frac{25}{2}$$

حالا به کمک فیثاغورس طول AB را به دست می‌آوریم.

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 5^2 \Rightarrow AB = \frac{5}{2}\sqrt{21}$$

نکته: هرگاه در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنید، دو مثلث قائم‌الزاویه پدید می‌آید که با هم و با مثلث اصلی متشابه هستند و با نوشتن نسبت‌های تشابه تساوی‌های زیر نتیجه می‌شود:



$$AH^2 = BH \times CH$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

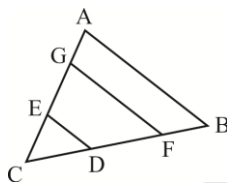
همین‌طور اگر دو بار مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم داریم:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} AB \times AC$$

بنابراین:

$$AH \times BC = AB \times AC$$

۲۶- در مثلث زیر، FG موازی AB هستند و AG=CE و AB=۱۲ و DE=۳ طول FG کدام است؟



۸ (۲)

۹ (۱)

۸ / ۵ (۴)

۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: چون $CE = AG$ و $DE = 3$ باید FG هم به اندازه سه واحد کمتر از AB باشد، یعنی $FG = 12 - 3 = 9$ درست مثل این که یک خط با شیب ۳ داشته باشیم، یعنی با اضافه شدن یک واحد به X، سه واحد به Y اضافه بشه حالا یک نقطه روی خط با عرض ۱۲ هست به‌ازای یک واحد X کمتر بخواهیم Y را حساب کنیم. در واقع اگر طول CE یک واحد باشد، به‌ازای هر ۱ واحد حرکت روی خط CA از طرف C به A ۳ واحد افزایش طول روی خطوط موازی AB داریم.



روش دوم: با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{ED}{AB} \xrightarrow{CE=AG=x, EG=y} \frac{x}{2x+y} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{CE}{CG} = \frac{ED}{FG} \rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{3}{FG}$$

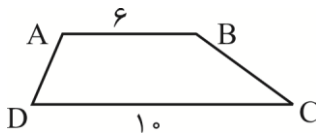
و از طرفی:

$$\frac{x}{2x+y} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{x}{2x+y-x} = \frac{x}{x+y} = \frac{3}{12-3} = \frac{3}{9}$$

پس:

$$\frac{3}{FG} = \frac{3}{9} \Rightarrow FG = 9$$

۲۷- در دوزنقه مقابل، نقطه دلخواهی روی قاعده بزرگ تر در نظر می گیریم و نام آن را P می گذاریم، اگر دو ساق را امتداد دهیم تا همدیگر را در M قطع کنند، نسبت مساحت مثلث MBA به مساحت مثلث ABP کدام است؟



$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

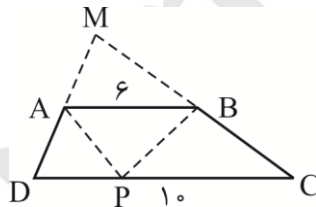
$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: دو مثلث دارای قاعده مشترک AB هستند، پس نسبت مساحت آنها برابر نسبت ارتفاع هاست از طرفی دو مثلث MBA و MCD متشابه هستند و نسبت ارتفاع های آنها همان نسبت اضلاع، یعنی $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ، بنابراین اگر ارتفاع MBA را h بنامیم و ارتفاع ABP را h' داریم:

$$\frac{h}{h+h'} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{3}{2}$$

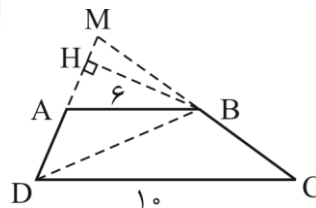


بنابراین نسبت مساحت دو مثلث هم $\frac{3}{2}$ است.

روش دوم: می توانیم P را روی D در نظر بگیریم. در این صورت دو مثلث هم ارتفاع می شوند و نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده هاست

یعنی $\frac{MA}{AD} (BH \text{ ارتفاع مشترک})$ از طرفی:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



بنابراین:

$$\frac{MA}{MD-MA} = \frac{3}{5-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MA}{MD-MA} = \frac{3}{2}$$

۲۸- دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه هستند، اگر طول اضلاع ABC برابر ۴, ۳, ۵ باشد، ارتفاع های مثلث A'B'C' برابر کدام می تواند باشد؟

$$۶, ۹, ۱۲ \quad (۴)$$

$$۱۵, ۹, ۱۲ \quad (۳)$$

$$۴/۸, ۶, ۸ \quad (۲)$$

$$۱۰, ۶, ۸ \quad (۱)$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

به دنبال سه عدد هستیم که با ضرب آن سه عدد در اعداد ۵، ۳، ۴ نتیجه یکسانی به دست می آید.
(ارتفاع بزرگتر برای ضلع کوچکتر است، به همین دلیل ضلع کوچک در ارتفاع بزرگ ضرب می شود و برعکس)

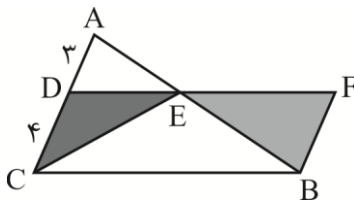
$$۸ \times ۳ = ۲۴$$

$$۶ \times ۴ = ۲۴$$

$$۴ / ۸ \times ۵ = ۲۴$$

دقت کنید، مساحت مقدار ثابتی است و ضرب ارتفاع در قاعده ۲ برابر مساحت است، همین طور توجه کنید نسبت ارتفاع های دو مثلث متشابه همان نسبت اضلاع است. در واقع روش دیگر این است که ارتفاع های مثلث ABC را مشخص کنیم و ببینیم اعداد کدام گزینه با آنها متناسب است.

۲۹- در شکل روبه رو چهار ضلعی BCDF متوازی الاضلاع است، نسبت مساحت مثلث EFB به مساحت CDE کدام است؟ (AD=۳, DC=۴)



$$\frac{۳}{۴} (۲)$$

$$\frac{۹}{۱۶} (۱)$$

$$\frac{۴}{۳} (۴)$$

$$\frac{۱۶}{۹} (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: دو مثلث CDE و EFB ارتفاع های برابر دارند (BH = CH') چون دو خط BC و DF موازی اند، پس نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده ها، یعنی:

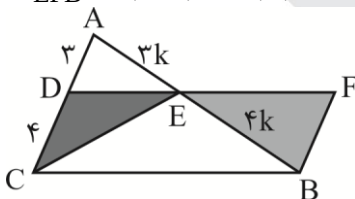
$$\frac{S_{EFB}}{S_{CDE}} = \frac{EF}{DE} = \frac{۴}{۳}$$

دقت کنید دو مثلث AED و EFB متشابه اند و نسبت $\frac{EF}{DE} = \frac{۴}{۳}$ (نسبت تشابه دو مثلث).

روش دوم:

مثلث های AED و EFB متشابه هستند، پس نسبت مساحت آنها برابر مربع نسبت اضلاع آنها است، یعنی:

$$\frac{S_{AED}}{S_{EFB}} = \left(\frac{AE}{EB}\right)^2 = \left(\frac{۳}{۴}\right)^2 = \frac{۹}{۱۶}$$



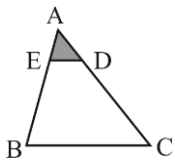
مثلث های AED و CDE دارای ارتفاع مشترک (EH) هستند، پس نسبت مساحت های آنها برابر نسبت قاعده هاست، یعنی:

$$\frac{S_{AED}}{S_{CDE}} = \frac{AD}{DC} = \frac{۳}{۴} \quad , \quad \frac{S_{EFB}}{S_{CDE}} = \frac{S_{AED}}{S_{EFB}} = \frac{۳}{۹} = \frac{۴}{۱۶}$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۳۰- در شکل زیر مساحت دوزنقه هشت برابر مساحت مثلث کوچک تر است، اگر $DE = 2$ باشد BC کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{2}$
(۲) ۸
(۳) ۴
(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

دقت کنید، در دو مثلث متشابه اگر نسبت اضلاع k باشد، نسبت محیطها و ارتفاعها و میانهها و نیمسازها همگی برابر k است و نسبت مساحتها برابر k^2 است.

$$\frac{S_{BCDE}}{S_{AED}} = 8 \Rightarrow \frac{S_{AED} + S_{BCDE}}{S_{AED}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AED}} = \frac{1+8}{1} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DE} = 3 \xrightarrow{DE=2} BC = 2 \times 3 = 6$$

biomaze.ir

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

